20/05/2015

## Άσκηση 20

Στον δ.χ $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε την απεικόνιση $<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με
$<(x_1, x_2, x_3),(y_1,y_2,y_3)> = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3$.

α) Δείξτε ότι η $<,>$ ορίζει εσ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$.

β) Να βρεθεί ισομετρία $T: (\mathbb{R}^3, <,>) \to (W, <,>_{can})$ όπου $W$ είναι ο υπόχωρος $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-y-2z+w=0\}$ εφοδιασμένο με τον περιορισμό του κανονικού εσωτερικού γινομένου του $\mathbb{R}^4$.

ΛΥΣΗ

α) Ισχυρισμός 1) $<,>$ συμμετρική

Αποδ: $<(y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)> = y_1x_1 - y_1x_3 - y_3x_1 + y_1x_3 + y_3x_2 + 4y_2x_2 + 2y_3x_3 = <(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>$.

β) Ισχυρισμός 2) $<,>$ διγραμμική. Αφού $<,>$ συμμετρική αρκεί ν.δ. τα εξής $<(x_1,x_2,x_3)+(x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)> = <(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> + <(x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)>$ και $<\lambda(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> = \lambda<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$
Οι σχέσεις είναι άμεσες απ' τον ορισμό του $<,>$.

Δείχνουμε ότι $<,>$ θετικά ορισμένο. Έστω $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ μη μηδενικό θα δείξουμε ότι $<(y_1, y_2, y_3), (y_1, y_2, y_3)> > 0$.
Έχουμε $<(y_1, y_2, y_3), (y_1, y_2, y_3)> = y_1^2 - 2y_1y_3 + 2y_2y_3 + 4y_2^2 + 2y_3^2$
$= (y_1 - y_2)^2 + 2y_2^2 + (y_2 + y_3)^2$
Άρα $<(y_1, y_2, y_3), (y_1, y_2, y_3)> > 0$ κ' είναι ίσο με 0 αν κ' μόνο αν $\begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$ $(y_1, y_2, y_3) = (0,0,0)$. Άρα $<,>$ εσ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$

Υπολογίζουμε με Gram-Schmidt ορθοκανονική βάση του $(\mathbb{R}^3, <>)$ $g_1, g_2, g_3$ και ορθ. βάση $g_1', g_2', g_3$ του $W$. Τότε απ' την θεωρία υπάρχει μοναδική γραμ. απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \to W$ με $T(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3) = \lambda_1 g_1' + \lambda_2 g_2' + \lambda_3 g_3$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ και η $T$ ισομετρία

Υπολογισμός $g_1, g_2, g_3$. Έστω $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt.
$\boxed{h_1 = e_1 = (1,0,0)}$ $h_2 = e_2 - \frac{<e_2, h_1>}{\|h_1\|^2} h_1 = (0,1,0) - (1,0,0) \boxed{= (0,1,0)}$

$h_3 = e_3 - \frac{<e_3, h_1>}{\|h_1\|^2} h_1 - \frac{<e_3, h_2>}{\|h_2\|^2} h_2 = (0,0,1) + (1,0,0) - \frac{1}{4}(0,1,0) =$
$= \boxed{(1, -\frac{1}{4}, 1)}$ Επομένως, θέτουμε $g_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = (1,0,0)$ $g_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} =$
$= \frac{(0,1,0)}{\sqrt{4}} = (0, \frac{1}{2}, 0)$ $g_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|} = \frac{(1, -\frac{1}{4}, 1)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} =$

Υπολογίζουμε πρώτα βάση του $W$. Έχουμε $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :$ $w = -x+y+2z\} = \{(x, y, z, -x+y+2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,2) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
$= < e_1' = (1,0,0,-1), e_2' = (0,1,0,1), e_3' = (0,0,1,2) >$
Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι κλιμακωτός και έχει βαθμίδα 3

Σαν συνέπεια, $e_1', e_2', e_3'$ γραμ. ανεξ. και άρα αφού παράγουν του $W$ είναι βάση του $W$. Εφαρμόζουμε μέθοδο Gram-Schmidt για να βρούμε ορθ. βάση του $W$. Θέτουμε $h_1' = e_1'$

$$h_2' = e_2' - \frac{\langle h_1', e_2' \rangle}{\|h_1'\|^2} . h_1'$$

$$h_3' = e_3' - \frac{\langle e_3', h_1' \rangle}{\|h_1'\|^2} h_1' - \frac{\langle e_3', h_2' \rangle}{\|h_2'\|^2} . h_2'$$

Θέτουμε $g_1' = \frac{h_1'}{\|h_1'\|}$, $g_2' = \frac{h_2'}{\|h_2'\|}$, $g_3 = \frac{h_3}{\|h_3'\|}$ (κάναμε πράξεις)

$$g_1' = \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}} \quad g_2' = \frac{(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \quad g_3' = \frac{(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3})}{\sqrt{7/3}}$$

Άσκηση 30

Αφού ο $A$ διαγωνίσιμος το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο διαφ. πρωτοβαθμίων. Αφού το $m_A(x)$ διαιρεί το $X_A(x)$ κ' έχουν ρίζες το $X_A(x)$ και οι ιδιοτιμές του $A$, δηλ. $0$ και $1$ έπεται ότι $m_A(x) = x(x-1)$

Αφού ο $A$ διαγωνίσιμος και $3\times3$, ο $A$ έχει 3 ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ με $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$

Δύο περιπτώσεις

1η: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$

2η: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Αν συνέβαινε το a) θα είχαμε $A$ όμοιο με τον $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$

Αλλά όμοιοι πίνακες έχουν ίδια βαθμ. και ο $D$ έχει βαθμίδα 1. Άρα και ο $A$ έχει βαθμίδα 1

Άρα η 1η περ. δεν μπορεί να συμβεί. Σαν συνέπεια $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Θέτουμε $g_1 = (1,1,0)$ $g_2 = (1,0,1)$ $g_3 = (0,1,1)$

$P = [g_1^t | g_2^t | g_3^t]$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Ελέγχουμε κατά τα γνωστά. $\det P \neq 0 \Rightarrow g_1, g_2, g_3$ βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$

Από την θεωρία $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$

Μετά τις πράξεις $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

__Άσκηση 18__

Έστω $k,m,n \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$. Έχουμε κατά τα γνωστά ότι A διαγωνίσιμος $\iff m_A(x) = (x-1)(x-2)$. Άρα έχουμε $\mathbb{O}_{3\times3} = m_A(A) = (A - I_3)(A - 2I_3) =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ m & n & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m+kn & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα πρέπει $m = kn$. Αντίστροφα αν $m = kn$ έχουμε $m_A(A) = 0$. και άρα ο A είναι διαγωνίσιμος. Επομένως, η συνθήκη είναι $m = kn$